О.М. Абрамова

Обращение школьной задачи как основа современных технологий обучения в математическом образовании

Аннотация. *В статье представлено систематическое описание некоторых из задачных конструкций, зарекомендовавших себя в практике математического образования – окрестность обращённых задач, предназначенная для лучшего усвоения школьниками взаимосвязей величин, характеризующих задачную ситуацию. Предложен подход к обучению математике учащихся, характерной особенностью которого является использование обращения математических задач в процессе их решения, позволяющий обогатить деятельностную основу методики обучения и осуществлять целенаправленное развитие такого важного интеллектуального качества, как гибкость мышления учащихся. Проведен теоретико-методологический анализ существующих подходов к трактовке понятия обращённая задача. Подчёркиваются перспективы и возможности использования в школьной практике обучения математике обращённых задач, которые учащиеся должны уметь решать, чтобы можно было считать их математическое образование полноценным. Выявляются семантические различия терминов «обращённая задача» и «обратная задача». Представлена их материализация в форме модельных конструкций, а также приводятся примеры прямой, обратной и обращенных задач и методические рекомендации по их конструированию. Описана процедура обращения математической задачи, выделены её основные этапы, даны методические рекомендации к каждому из них, разработан алгоритм для самостоятельного обращения учащимися математической задачи.*

Ключевые слова: *математические задачи, обращение задачи, обратные задачи, современные технологии обучения, процедура обращения, гибкость мышления, алгоритмическое предписание, задачная конструкция, методика обучения, школьники.*

Вопросы организации эффективной математической деятельности школьников, формирования её основных элементов, поиска и создания методического обеспечения данного процесса на сегодняшний день по-прежнему составляют одну из актуальных проблем педагогической науки. Общество и государство ставят перед школой задачу подготовить учащихся к жизни в современном, быстро изменяющемся мире, сформировать их познавательную самостоятельность, умение творчески подходить к решению задач.

Большие резервы в решении вышеуказанных проблем связаны с использованием новых высокоэффективных методических приёмов обучения, к которым по праву может быть отнесено широкое задействование всевозможных задачных конструкций образовательного назначения, в том числе так называемых окрестностей обращенных задач.

Разумеется, введение обращения задач в учебный процесс не есть самоцель, это всего лишь инструмент для интеллектуального развития обучаемых и, в частности, для развития гибкости их мышления. И все дальнейшие рекомендации

DOI: 10.7256/2306-434X.2014.3.14016

не претендуют на то, чтобы для каждой задачи составлять окрестности обращённых задач, но такие задачные конструкции должны найти место в учебном процессе общеобразовательных школ, привнося в обучение весь богатейший арсенал дидактических возможностей, им свойственных.

Несмотря на солидную историю, проблема постановки школьных математических задач в учебном процессе всё ещё весьма далека от приемлемого решения. И дело здесь не столько в недооценке или недопонимании их ведущей роли в обучении, сколько в отсутствии эффективных методик их рационального задействования в реальном учебном процессе.

В условиях усиления внимания педагогической общественности к развивающей ценности математического образования возрастает значение методик продуктивного обучения, обеспечивающих не только усвоение системы математических знаний и умений, но и обретение опыта творческой деятельности, всемерное развитие интеллектуальных способностей школьников, и в особенности, такого важного умственного качества как гибкость мышления [1, 2].

Правомерно полагая, что одной из главных проблем, которую постоянно приходится решать учителю в процессе подготовки к занятиям, является отбор задач, наилучшим образом отвечающих поставленным образовательным целям, А.М. Гольдман и Л.И. Звавич закономерно приходят к выводу о том, что «одна задача, сама по себе мало чего стоит» [5, с. 19]. Для достижения той или иной образовательной цели важна целая их совокупность или серия взаимосвязанных задач. От успешного решения этого вопроса, полагают они, в большей степени зависит качество и каждого урока математики, и всего математического образования школьников.

Среди одних из эффективных задачных конструкций, используемых в теории обучения математике, можно выделить обращённые задачи, решаемые наряду с прямыми задачами. Указания на этот счёт имеются в работах многих известных психологов и педагогов-математиков (В.А. Крутецкий, Д. Пойа, Г.И. Саранцев, Л.М. Фридман, П.М. Эрдниев и др.).

Наиболее последовательно этого положения придерживается автор теории укрупнения дидактических единиц, академик П.М. Эрдниев. Призывая к временному сближению постановки и решения прямых и обратных задач, он считает, что такая работа, способствует, во-первых, лучшему пониманию структуры математической задачи, во-вторых, более глубокому осознанию тех взаимосвязей и отношений, которые свойственны задачной ситуации, наилучшему пониманию её логической структуры и предметного содержания, а, в-третьих, приобщает школьников к творческой деятельности, поскольку любую сконструированную обратную задачу, по мнению ученого, можно считать «продуктом творчества учащихся» [12, с. 29].

Автор неоднократно подчёркивает, что ценность решения прямых и обратных задач состоит ещё и в том, что при их решении осуществляется переключение с прямого хода мысли на обратный, а это способствует развитию мышления обучаемых.

Разделяя данное мнение, добавим, что при этом получает развитие такое фундаментальное умственное качество как гибкость мышления. В условиях развивающей образовательной парадигмы современной школы данное обстоятельство представляется нам особенно важным.

Подчёркивая ценностное значение таких задач в образовании школьников, академик не даёт каких-либо семантических, структурных или функциональных характеристик обращённых задач как совокупности задач дидактического назначения.

Поэтому сам термин «обратная задача» нуждается всё же в обосновании и уточнении.

В методике обучения геометрии [6], чаще всего, говорят об обратных теоремах (утверждениях) по отношению к рассматриваемым (прямым), записывая их, соответственно, как ($A \rightarrow B$) и ($B \rightarrow A$), где A и B – условие и заключение прямой теоремы. Истинность обоих утверждений важна не только в познавательном отношении, но ещё и в семантическом – получаем признак, свойственный лишь тому объекту (объектам), о которых говорится в теореме (признаки равенства и подобия треугольников, признак параллелограмма, признак параллельности прямых, признак параллельности прямой и плоскости, признак параллельности плоскостей, признак перпендикулярности прямой и плоскости, признак перпендикулярности плоскостей и т.п.).

В методике арифметики и алгебры об обратных задачах говорят не столько в контексте

DOI: 10.7256/2306-434X.2014.3.14016

установления истинности прямых и обратных утверждений, сколько как о новых задачах, получаемых приёмом обращения, и их дидактических и развивающих возможностях в обучении. Суть этого приёма заключается в том, что при сохранении сюжета из условия прямой задачи извлекаются часть или даже все данные и включаются в её требование, а из него, соответственно, исключаются несколько или все найденные искомые и переводятся в её условие (Е.С. Канин, Г.И. Саранцев, Л.М. Фридман, П.М. Эрдниев и др.) Очевидно, последовательно применяя данный приём, из исходной задачи можно получить не одну, а несколько новых задач, взаимосвязанных друг с другом по условию и требованию. В методической литературе все их также называют обратными задачами по отношению к исходной.

Но закономерен вопрос, почему, чему и насколько «обратны» вновь получаемые задачи, и каково их дидактическое и развивающее значение? Ведь в одних случаях вновь получаемая задача претерпевает сравнительно небольшие структурные изменения, когда из прямой задачи лишь малая часть данных переходит в её требование, и, наоборот, из него исключено всего лишь одно (и не самое значимое!) из нескольких искомых и введено в её условие. А в других случаях, напротив, – эти изменения значительные, а порой происходит и полная перестановка местами условия и заключения исходной задачи.

Здесь уместно заметить, что в научно-методической литературе наряду с термином «обратная задача» можно встретить (правда, редко!) и другой термин – «обращённая задача», которым также называются задачи, полученных из исходной путём полной или частичной замены её условий требованиями, а последних – условиями.

Именно так называет Е.С. Канин новые задачи, «полученные из исходной, в которых часть данных исходной задачи принимается за искомые, а некоторые искомые считаются данными» [10, с. 11]. Справедливости ради, следует отметить всё же, что автор употребляет в своих рассуждениях и термин «обращённая задача», и термин «обратная задача», не проводя между ними никакой грани различия.

Имеется и ещё одна, более расширительная, трактовка обращённой задачи, она принадлежит И.Е. Дразнину. Автор справедливо полагает, что не стоит заканчивать работу над задачей с получением ответа или с завершением доказательства, а следует, «рассмотрев обратную задачу, противоположную, расширенную, т.е. обогащённую каким-то дополнительным условием или, наоборот, обобщённую – такую, из которой какое-либо условие удалено». Все такие дополнительные задачи он называет «обращёнными, поскольку они не совсем оригинальны, а придуманы (превращены, обращены) на основе каких-то других задач» [7, с. 52].

С таким пониманием обращённой задачи вряд ли можно согласиться, ведь им охватывается весьма широкой класс задач, полученных из данной посредством того или иного её видоизменения. Исследователи уже неоднократно отмечали и разводили задачи, получаемые путём изменения того или иного вида, к примеру, различаются задачи-обобщения, задачи-обращения, задачи-аналогии и т.п.

Попытаемся разобраться в сложившейся ситуации.

Для большей убедительности применим моделирование самого процесса замены условий задачи её требованиями и наоборот.

Совокупность условий задачи *У* представим в виде множества $\{y_i\}$, а совокупность её требований *Т* – в виде множества $\{t_j\}$. Если одно данное из условия (например, y_i) исходной задачи переводится в искомые и одно найденное значение (например, t_j) – в условие, то процесс обращения задачи схематично можно представить так (рис. 1а). Если же, таковых элементов будет взято больше, к примеру, y_1, y_2, и t_1, t_2, t_3, то схематичное представление процесса обращения задачи будет несколько иным (рис. 1б). Действуя, таким образом, можно перебрать все различные комбинации из элементов условия и требования исходной задачи, включая и тот самый случай, когда вся совокупность $\{t_j\}$ перейдет в условие *У*, а вся совокупность $\{y_i\}$ перейдет в требование *Т* (рис. 1в) [9].

На предложенной модели не трудно увидеть своеобразный оборот (обращение) элементов условия и требования исходной (прямой) задачи, а потому, каждую вновь получаемую задачу логичнее всего было бы назвать обращённой, а не обратной, как она традиционно называется в методической литературе.

Обратим внимание также и на то, что среди обращённых задач есть одна, которая занимает особое положение, она соответствует тому случаю, когда все до одного элемента из $\{y_i\}$ перешли

DOI: 10.7256/2306-434X.2014.3.14016

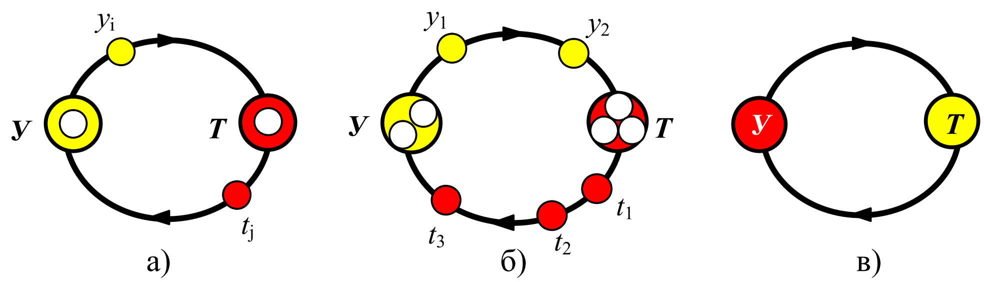


Рис. 1. Модельное представление процесса обращения задачи

в *Т*, и все до одного элемента из $\{t_j\}$ перешли в *У*, что, по сути, будет означать, что обращение элементов условия и требования задачи выполнено по максимуму – то, что в исходной задаче было известно (дано), в ней необходимо найти, а то, что требовалось определить, наоборот, – стало известным. Фактически здесь имеет место предельный случай обращения задачи. Он соответствует тем представлениям, которые утвердились в методике геометрии (*У*→*Т*) и (*Т*→*У*) о прямых и обратных утверждениях. А потому эту обращённую задачу логично называть обратной по отношению к исходной (прямой).

Комментируя изложенное выше, выскажем мнение о том, что, несмотря на традиционно закрепившееся в методике математики одинаковое название для всех задач, получаемых в результате осуществления частичного или полного обращения элементов условия и требования исходной задачи – «обратная задача», в условиях проектирования высокоэффективных методик обучения современных школьников целесообразнее было бы различать получаемые при этом задачи и употреблять разные термины – «обращённая задача» и «обратная задача».

Наконец, уместно ещё раз подчеркнуть ценностный аспект возможностей в развитии личностных качеств обучаемых, которые появляются благодаря использованию обращённых задач как особой задачной конструкции или дидактического средства в образовательном процессе по математике.

Во-первых, составление и решение обратных задач способствует лучшему пониманию структуры математической задачи, обеспечивает более глубокое осознание тех взаимосвязей и отношений, которые свойственны задачной ситуации, позволяет школьникам как бы заглянуть внутрь структуры задачи и увидеть взаимосвязи её данных, данных и искомых и тем самым понять её математическую сущность.

Во-вторых, такая работа над уже решённой задачей приобщает учащихся к математическому творчеству, способствует развитию их креативности, поскольку процесс обращения адекватен процессу исследования определённой проблемы и обеспечивает формирование у школьников умений, необходимых для выполнения творческих исследовательских работ.

В-третьих, ценность приёма обращения заключается в том, что с его помощью получаются новые задачи, при решении которых используются мыслительные операции, математические действия обратные по отношению к тем, которые применялись в процессе решения исходной (прямой) задачи, т.е. имело место своеобразное превращение прямой связи мыслей в обратную, что способствует развитию такого фундаментального умственного качества как гибкость мышления. Заметим, что особую ценность для развития гибкости мышления школьников представляют не прямые и обратные задачи, взятые как таковые сами по себе, в отдельности. Наиболее значимый развивающий эффект достигается здесь в процессе преобразования одной задачи в другую, в выполнении тех «невидимых» и трудноуловимых при логическом анализе элементов мысли, которые связывают процессы решения обеих задач.

При традиционной методике обучения математике, основанной на решение однотипных задач, какими бы сложными они не были, мышление обогащается преимущественно цепью переходов между мыслями одного направления, что способствует формированию конвергентного мышления,

DOI: 10.7256/2306-434X.2014.3.14016

но не как не дивергентного, так необходимого современному человеку.

В-четвёртых, в процессе обращения задачи и последующего решения обратных задач происходит формирование действий, необходимых для овладения общим умением решать задачи: извлекать информацию из условия и требования задачи, вычленять отдельные элементы и комбинировать их, переформулировать условие и требование, выводить следствия, работать с математическими моделями задачи, а также умения формулировать новую задачу.

И наконец, в-пятых, подходы к поиску решения обратных задач нередко отличаются от тех, что использовались при поиске решения исходной задачи, а знакомство с ними существенно обогащает математическую культуру и кругозор учащихся.

В целом, следует сказать, что обращённые задачи, можно рассматривать как дидактическое средство, обладающее возможностями в развитии личностных качеств обучаемых. Их применение способствует:

- развитию интереса учащихся к занятиям математикой;
- развитию познавательной самостоятельности школьников математическими средствами;
- развитию эстетического вкуса учащихся средствами математики;
- развитию креативности школьников, формированию у них способности к математическому творчеству и др.;
- развитию внимательности обучаемого;
- развитию целеустремлённости, настойчивости в достижении поставленной цели.

Каждое из этих личностных качеств важно само по себе, а все вместе, дополняя друг друга, они делают учебное познание более насыщенным, интересным и увлекательным.

В методических целях процесс обращения математической задачи целесообразно разбить на пять основных этапов: этап анализа содержания прямой задачи; этап решения прямой задачи и его проверки; этап подготовки к обращению задачи; этап осуществления обращения задачи; этап исследования обращённой задачи. Они дают лишь общее представление о процессе обращения математической задачи как о сложном и многоплановом явлении и, вообще говоря, важны скорее для учителя, нежели для учащихся.

Для практической работы с учащимися гораздо полезнее иметь дело не с общим описанием процедуры, а с конкретным предписанием алгоритмического типа, наглядно показывающим ту последовательность действий, которую необходимо выполнить для обращения математической задачи. Предложенное нами алгоритмическое предписание состоит из шести шагов, облегчающих деятельность школьников по самостоятельному выполнению процедуры обращения математической задачи. Менее способным к математике школьникам оно, как нить Ариадны, указывает «спасительный путь в лабиринте сомнений и догадок», а более способным – даёт общую ориентацию в выборе каждого последующего шага, то есть развивает важнейшее для математика умение определять значимые факты и перспективные направления исследования.

Приведём поясняющие примеры [8].

Пусть в качестве исходной задачи взята следующая.

Задача 1. *Длина картофельного поля прямоугольной формы равна* 1635 *м, что на* 439 *м больше его ширины. Вычислите ширину и периметр поля.*

В результате последовательного осуществления школьниками шагов алгоритмического предписания обращения задачи 1 будут получены следующие числовые цепочки:

1.	1635 *м*	439 *м*	$\boxed{1196\ м}$	$\boxed{5662\ м}$	;
1.1.	$\boxed{1635\ м}$	439 *м*	$\boxed{1196\ м}$	5662 *м*	;
1.2.	$\boxed{1635\ м}$	439 *м*	1196 *м*	$\boxed{5662\ м}$	;
1.3.	1635 *м*	$\boxed{439\ м}$	$\boxed{1196\ м}$	5662 *м*	;
1.4.	1635 *м*	$\boxed{439\ м}$	1196 *м*	$\boxed{5662\ м}$	;
1.5.	$\boxed{1635\ м}$	439 *м*	1196 *м*	5662 *м*	;
1.6.	1635 *м*	$\boxed{439\ м}$	1196 *м*	5662 *м*	;
1.7.	1635 *м*	439 *м*	$\boxed{1196\ м}$	5662 *м*	;
1.8.	1635 *м*	439 *м*	1196 *м*	$\boxed{5662\ м}$	;
1.9.	$\boxed{1635\ м}$	$\boxed{439\ м}$	1196 *м*	5662 *м*	.

Приведём соответствующие каждой числовой цепочки тексты обращённых задач (1.1-1.9).

Задача 1.1. *Длина картофельного поля прямоугольной формы на* 439 *м больше его ширины. Периметр поля равен* 5662 *м. Вычислить длину и ширину поля.*

DOI: 10.7256/2306-434X.2014.3.14016

Задача 1.2. *Ширина картофельного поля прямоугольной формы равна* 1196 *м, что на* 439 *м меньше его длины. Вычислите длину и периметр поля.*

Задача 1.3. *Длина картофельного поля прямоугольной формы равна* 1635 *м, а периметр –* 5662 *м. Найдите ширину поля и укажите какова разница длины и ширины поля.*

Задача 1.4. *Длина картофельного поля прямоугольной формы равна* 1635 *м, а его ширина –* 1196 *м. Найдите периметр поля и разницу между длиной и шириной поля.*

Задача 1.5. *Ширина картофельного поля –* 1196 *м, что на* 439 *м меньше его длины. Периметр поля равен* 5662 *м. Вычислите длину поля.*

Задача 1.6. *Длина картофельного поля прямоугольной формы равна* 1635 *м, а ширина* 1196 *м. Периметр поля* 5662 *м. Найдите разницу между длинной и шириной поля.*

Задача 1.7. *Длина картофельного поля прямоугольной формы равна* 1635 *м, что на* 439 *м больше его ширины. Периметр поля равен* 5662 *м. Вычислите ширину поля.*

Задача 1.8. *Длина картофельного поля прямоугольной формы равна* 1635 *м, что на* 439 *м больше его ширины, которая равна* 1196 *м. Вычислите периметр поля.*

Задача 1.9. *Ширина картофельного поля равна* 1196 *м, а периметр –* 5662 *м. Вычислите длину поля и разницу между длиной и шириной поля.*

Заметим, что осуществление алгоритмического предписания по обращению задач школьниками целесообразно реализовывать при обобщающем повторении изученного материала, когда учащимися усвоены основные способы и методы решения задач.

Практика показала, что использование обращения задач в процессе обучения математике создавало в классе благоприятный творческий климат. С большим интересом и азартом учащиеся брались за обращение очередной задачи. У ребят возникало чувство удовлетворения после каждой верно обращённой и решённой задачи. Успех, испытанный в результате преодоления трудностей, давал мощный импульс повышению познавательной активности. У школьников, в том числе и у «слабых», появлялась уверенность в своих собственных силах, они уже не чувствовали страх перед обращением новой задачи, рисковали самостоятельно пробовать свои силы, соперничая с одноклассниками по количеству верно составленных числовых цепочек, их манила неизвестность того, какое же количество задач возможно получить в результате обращения всего лишь одной задачи. При такой организации работы над задачами учитель выступал не в роли «оракула, изрекающего догматические истины, а в роли умелого дирижёра, который не позволяет «фальшивить» ни одному из своих подопечных и в то же время старается раскрыть максимум творческих возможностей каждого из них» [9]. Всё это способствовало активизации мыслительной деятельности учащихся 5-6 классов, созданию положительной мотивации к учению.

Наконец, согласимся с мнением, высказанным многими исследователями о том, что умение составлять математические задачи целевого назначения следует отнести к фундаментальным умениям школьного учителя математики, наличие которого свидетельствует о высокой компетентности в области методики обучения математике.

Обратимся теперь к следующей задаче 2.

Задача 2. *Скорость катера по течению реки равна 22 км/ч, а собственная скорость катера – 20 км/ч. Найдите скорость катера против течения реки и скорость течения реки. (Ответ: 18 км/ч, 2 км/ч).*

В результате обращения данной задачи можно получить 9 обращённых задач, две из которых будут не разрешимыми (тексты не приводятся) и одна из обращённых задач будет являться обратной (2.7) по отношению к исходной (прямой):

Задача 2.1. *Собственная скорость катера равна 20 км/ч, а скорость течения реки – 2 км/ч. Найдите скорость катера по течению и против течения реки.*

Задача 2.2. *Скорость катера по течению реки равна 22 км/ч, а скорость течения реки – 2 км/ч. Найдите собственную скорость катера и скорость катера против течения реки.*

Задача 2.3. *Скорость катера против течения реки равна 18 км/ч, а собственная скорость катера – 20 км/ч. Найдите скорость течения реки и скорость катера по течению реки.*

Задача 2.4. *Скорость катера по течению реки равна 22 км/ч, а против течения – 18 км/ч. Найдите скорость течения реки и собственную скорость катера.*

DOI: 10.7256/2306-434X.2014.3.14016

Задача 2.5. *Скорость катера против течения реки равна 18 км/ч, собственная скорость катера – 20 км/ч, а скорость течения реки – 2 км/ч. Найдите скорость катера по течению реки.*

Задача 2.6. *Скорость катера по течению реки равна 22 км/ч, а против течения – 18 км/ч. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки – 2 км/ч.*

Задача 2.7. *Скорость катера против течения реки равна 18 км/ч, а скорость течения реки – 2 км/ч. Найдите скорость катера по течению реки и собственную скорость катера.*

Обратим внимание, что, обращённые задачи, как правило, полифункциональны и могут задействоваться на различных этапах учебного процесса.

Всю совокупность обращённых задач, полученных путём обращения из исходной задачи, будем называть *окрестностью обращённых задач*.

Перейдём теперь к более детальному рассмотрению практического осуществления процесса обращения задачи и работы с окрестностью обращённых задач различного содержания.

Арифметическая задача

Исходная задача 3. *Первая бригада токарей обработала за месяц 132503 деталей, вторая бригада – на 33245 детали меньше, чем первая, а третья – на 4281 детали больше, чем вторая. Сколько деталей обработали за месяц три бригады? (Ответ: 335300 детали)*

Числовые цепочки структурных элементов для обращённых задач будут следующими:

Составляя по каждой из структурных цепочек формулировку задачи, получим, следующую окрестность исходной задачи 3.

Задача 3.1. *За месяц три бригады обработали 335300 деталей. Причём вторая бригада обработала на 33245 деталей меньше, чем первая, а третья на 4281 деталь больше, чем вторая. Сколько деталей обработала за месяц первая бригада?*

Задача 3.2. *Три бригады токарей за месяц обработали 335300 детали. Первая бригада токарей обработала за месяц 132503 детали, вторая бригада – на несколько деталей меньше, чем первая, а третья – на 4281 деталь больше, чем вторая. На сколько деталей меньше обработала вторая бригада?*

Задача 3.3. *Три бригады токарей за месяц обработали 335300 детали. Первая бригада токарей обработала за месяц 132503 детали, вторая бригада – на 33245 детали меньше, чем первая. На сколько деталей больше чем вторая обработала третья бригада?*

Задача 3.4. *Три бригады токарей за месяц обработали 335300 детали. Причём, третья бригада обработала на 4281 деталь больше, чем вторая. Сколько деталей обработали первая и вторая бригады за месяц каждая в отдельности?*

Задача 3.5. *Три бригады токарей за месяц обработали 335300 детали. Причём, вторая бригада обработала на 33245 детали меньше, чем первая, а третья – на несколько деталей больше, чем вторая. Сколько деталей изготовила первая бригада за месяц и на сколько деталей больше, чем вторая обработала третья бригада?*

1.	$\boxed{132503\ \text{äåò}}$	33245 *дет*	4281 *дет*	335300 *дет*;
2.	132503 *äåò*	$\boxed{33245\ \text{дет}}$	4281 *дет*	335300 *дет*;
3.	132503 *äåò*	33245 *дет*	$\boxed{4281\ \text{дет}}$	335300 *дет*;
4.	$\boxed{132503\ \text{äåò}}$	$\boxed{33245\ \text{дет}}$	4281 *дет*	335300 *дет*;
5.	$\boxed{132503\ \text{äåò}}$	33245 *дет*	$\boxed{4281\ \text{дет}}$	335300 *дет*;
6.	132503 *äåò*	$\boxed{33245\ \text{дет}}$	$\boxed{4281\ \text{дет}}$	335300 *дет*;
7.	$\boxed{132503\ \text{äåò}}$	$\boxed{33245\ \text{дет}}$	$\boxed{4281\ \text{дет}}$	335300 *дет*.

DOI: 10.7256/2306-434X.2014.3.14016

При цитировании этой статьи сноска на doi обязательна

Задача 3.6. *Три бригады токарей за месяц обработали* 335300 *детали. Первая бригада токарей обработала за месяц* 132503 *детали, вторая бригада – на несколько деталей меньше, чем первая, а третья – на несколько деталей больше, чем вторая. Сколько деталей за месяц обработала вторая бригада и на сколько деталей больше, чем вторая обработала третья бригада?*

Задача 3.7. *Три бригады токарей за месяц обработали* 335300 *детали. Найдите, сколько деталей обработала каждая бригада токарей за месяц, если вторая бригада обработала на несколько деталей меньше, чем первая, а третья – на несколько деталей больше, чем вторая.*

Таким образом, мы получили окрестность арифметической задачи 3, состоящую из 7 задач.

Алгебраическая задача

Пусть в качестве исходной задачи взята следующая алгебраическая задача.

Исходная задача 4. *Найти первый и шестой члены геометрической прогрессии, если известно, что её знаменатель равен* 2, *а сумма семи первых членов равна* 381.

(Ответ: $b_1 = 3$; $b_6 = 96$.)

Перебирая различные комбинации данных с искомыми прямой задачи, конструируем всевозможные числовые цепочки обращённых задач.

Выбрав в качестве неизвестного, например, знаменатель прогрессии, и включив при этом найденное искомое – первый член геометрической прогрессии в условие конструируемой задачи (см. цепочку 1), можно сформулировать следующую задачу окрестности исходной задачи 4:

Задача 4.1. *Первый член геометрической прогрессии равен* 3, *а сумма первых семи её членов равна* 381. *Найти знаменатель прогрессии и её шестой член.*

Если же в качестве искомого выбрана сумма семи первых членов геометрической прогрессии, а найденный шестой её член введён в условие задачи (см. цепочку 3) можно получить уже такую обращённую задачу окрестности:

Задача 4.3. *Шестой член геометрической прогрессии равен* 96, *а её знаменатель равен* 2. *Найти первый член этой прогрессии и сумму семи первых членов.*

Аналогичным образом могут быть составлены и все остальные обращённые задачи окрестности исходной задачи 4 по соответствующим числовым цепочкам.

Примечательно, что в результате обращения исходной алгебраической задачи 4 получается окрестность, состоящая не только из обращённых задач, представленных числовыми цепочками 1 – 8, некоторые из которых являются не разреши-

1.	$\boxed{q=2}$	$S_7=381$	$b_1=3$	$\boxed{b_6=96}$	;
2.	$\boxed{q=2}$	$S_7=381$	$\boxed{b_1=3}$	$b_6=96$	;
3.	$q=2$	$\boxed{S_7=381}$	$\boxed{b_1=3}$	$b_6=96$	;
4.	$q=2$	$\boxed{S_7=381}$	$b_1=3$	$\boxed{b_6=96}$	;
5.	$\boxed{q=2}$	$S_7=381$	$b_1=3$	$b_6=96$	;
6.	$q=2$	$\boxed{S_7=381}$	$b_1=3$	$b_6=96$	;
7.	$\boxed{q=2}$	$\boxed{S_7=381}$	$\boxed{b_1=3}$	$b_6=96$	;
8.	$\boxed{q=2}$	$\boxed{S_7=381}$	$b_1=3$	$\boxed{b_6=96}$	;
9.	$\boxed{q=2}$	$\boxed{S_7=381}$	$b_1=3$	$b_6=96$	.

DOI: 10.7256/2306-434X.2014.3.14016

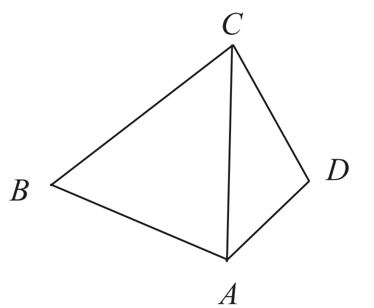
мыми, например 7, 8, но и из разрешимой обратной задачи 9, которая формулируется так:

Задача 4.9. *Первый и шестой члены геометрической прогрессии соответственно равны* 3 *и* 96*. Найти ее знаменатель и сумму семи первых членов.*

Геометрическая задача

Исходная задача 5. *Периметр четырехугольника ABCD равен* 132*. Одна из его диагоналей делит четырехугольник на два треугольника ABC и ACD с периметрами* 81 *и* 95*. Чему равна диагональ AC? (рис. 2)*

(Ответ: AC = 22*).*



Сконструируем все возможные числовые цепочки задач окрестности геометрической задачи 5.

1.	$\boxed{132}$	81	95	22	;
2.	132	$\boxed{81}$	95	22	;
3.	132	81	$\boxed{95}$	22	;
4.	$\boxed{132}$	$\boxed{81}$	95	22	;
5.	$\boxed{132}$	81	$\boxed{95}$	22	;
6.	132	$\boxed{81}$	$\boxed{95}$	22	;
7.	$\boxed{132}$	$\boxed{81}$	$\boxed{95}$	22	.

Формулировки обращённых задач будут соответственно следующими:

Задача 5.1. *Диагональ четырехугольника ABCD равна* 22 *и делит его на два треугольника ABC и ACD с периметрами* 81 *и* 95 *соответственно. Найти периметр четырехугольника.*

Задача 5.2. *Диагональ четырехугольника, периметр которого* 132*, равна* 22 *и делит его на два треугольника, периметр одного из них* 95*. Найти периметр второго треугольника.*

Задача 5.3. *Диагональ AC четырехугольника ABCD, периметр которого* 132*, равна* 22 *и делит его на два треугольника, периметр одного из них* 81*. Найти периметр второго треугольника.*

В ходе анализа числовых цепочек 4 – 7 делаем заключение, что получим не разрешимые задачи, поэтому в данном случае не будем останавливаться на формулировках их условия и требования. Так, в итоге обращения исходной геометрической задачи 5, мы получили окрестность, состоящую из 7 задач, 4 из которых оказались не разрешимыми.

Задачи для самостоятельного составления окрестности обращённых задач различного содержания

Арифметические задачи

1. *В первый день скосили* 30 *га посевов, во второй день скосили в* 2 *раза больше, чем в первый день. В третий день скосили на* 15 *га меньше, чем во второй день. Сколько гектаров скосили в третий день?* [12].

Числовые цепочки структурных элементов для обращённых задач будут следующими:

1.	$\boxed{30\ га}$	*в* 2 *раза*	*на* 15 *га*	45 *га*	;
2.	30 *га*	$\boxed{в\ 2\ раза}$	*на* 15 *га*	45 *га*	;
3.	30 *га*	*в* 2 *раза*	$\boxed{на\ 15\ га}$	45 *га*	;
4.	$\boxed{30\ га}$	$\boxed{в\ 2\ раза}$	*на* 15 *га*	45 *га*	;
5.	30 *га*	$\boxed{в\ 2\ раза}$	$\boxed{на\ 15\ га}$	45 *га*	;
6.	$\boxed{30\ га}$	*в* 2 *раза*	$\boxed{на\ 15\ га}$	45 *га*	;
7.	$\boxed{30\ га}$	$\boxed{в\ 2\ раза}$	$\boxed{на\ 15\ га}$	45 *га*	.

2. *Два туриста вышли одновременно навстречу друг другу из двух пунктов и встретились через* 3 *часа. Найдите расстояние между пунктами, если известно, что скорость первого туриста* 5 *км/ч, а второго -* 6 *км/ч.*

3. *Прогулочный катер "Ковчег" спустился по течению реки на* 54 *км, а обратно прошел* 48 *км за то же время, за которое он мог бы в стоячей воде пройти* 105 *км. Какую скорость имеет катер в стоячей воде, если скорость течения реки* 3 *км/ч?*

Алгебраические задачи

1. *Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если* a_5=27, a_{27}=60.

Числовые цепочки структурных элементов для обращённых задач будут следующими:

DOI: 10.7256/2306-434X.2014.3.14016

1.	$\boxed{a_5 = 27}$	$a_{27} = 60$	$\boxed{a_1 = 21}$	$d = 1{,}5$	;
2.	$\boxed{a_5 = 27}$	$a_{27} = 60$	$a_1 = 21$	$\boxed{d = 1{,}5}$	;
3.	$a_5 = 27$	$\boxed{a_{27} = 60}$	$\boxed{a_1 = 21}$	$d = 1{,}5$	;
4.	$a_5 = 27$	$\boxed{a_{27} = 60}$	$a_1 = 21$	$\boxed{d = 1{,}5}$	;
5.	$\boxed{a_5 = 27}$	$\boxed{a_{27} = 60}$	$\boxed{a_1 = 21}$	$d = 1{,}5$	;
6.	$\boxed{a_5 = 27}$	$\boxed{a_{27} = 60}$	$a_1 = 21$	$\boxed{d = 1{,}5}$	;
7.	$\boxed{a_5 = 27}$	$a_{27} = 60$	$a_1 = 21$	$d = 1{,}5$	;
8.	$a_5 = 27$	$\boxed{a_{27} = 60}$	$a_1 = 21$	$d = 1{,}5$	;
9.	$\boxed{a_5 = 27}$	$\boxed{a_{27} = 60}$	$a_1 = 21$	$d = 1{,}5$	.

2. *Найти первый и пятый члены арифметической прогрессии, если известно, что ее разность равна* 3, *а сумма шести первых членов равна* 285.

3. *Найти первый и пятый члены геометрической прогрессии, если известно, что знаменатель её равен* 3, *а сумма шести первых членов равна* 1820.

Геометрические задачи

1. *Периметр четырехугольника ABCD равен* 66. *Одна из его диагоналей делит четырехугольник на два треугольника ABC и ACD с периметрами* 42 *и* 56. *Чему равна диагональ AC?*

Числовые цепочки структурных элементов для обращённых задач будут следующими:

1.	$\boxed{66}$	42	56	16 ;
2.	66	$\boxed{42}$	56	16 ;
3.	66	42	$\boxed{56}$	16 ;
4.	$\boxed{66}$	$\boxed{42}$	56	16 ;
5.	$\boxed{66}$	42	$\boxed{56}$	16 ;
6.	66	$\boxed{42}$	$\boxed{56}$	16 ;
7.	$\boxed{66}$	$\boxed{42}$	$\boxed{56}$	16 .

2. *Периметр равнобедренной трапеции равен* 28 *см, большее основание –* 10 *см, диагональ делит острый угол трапеции пополам. Найдите длину меньшего основания.*

3. *В прямоугольном треугольнике ABC известны его катет a и гипотенуза c. Найдите его второй катет b и острые углы* α *и* β.

Тригонометрические задачи

1. *Найдите, чему равна разность острых углов* α *и* β, *если* $tg\,\alpha = \frac{4}{3}, tg\,\beta = \frac{1}{7}$.

Числовые цепочки структурных элементов всех обращённых задач такие:

1.	$\boxed{tg\alpha = \frac{4}{3}}$	$tg\beta = \frac{1}{7}$	$\alpha - \beta = 45^0$;
2.	$tg\alpha = \frac{4}{3}$	$\boxed{tg\beta = \frac{1}{7}}$	$\alpha - \beta = 45^0$;
3.	$\boxed{tg\alpha = \frac{4}{3}}$	$\boxed{tg\beta = \frac{1}{7}}$	$\alpha - \beta = 45^0$.

2. *Найти значение выражения*: $\sqrt{17}\sin\alpha$, *если* $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$.

3. *Найти* sin α, cos α, tg α, *если* tg α /2 = 7/8 *и* 0° ≤ α ≤90°.

Можно заметить, что упражнения в составлении окрестностей обращённых задач в процессе обучения математике создаёт основу для развития креативности школьников, поскольку самому процессу конструирования обращённых задач свойственны черты творческой математической деятельности.

Нельзя не видеть также, что использование в обучении математике обращения задач даёт возможность создавать условия к сближению учебной и исследовательской деятельности учащихся, что, в свою очередь, позволяет пробудить у них

DOI: 10.7256/2306-434X.2014.3.14016

осознанную активную заинтересованность как в самом учебном процессе, так и в его результатах. У них появляется интерес к изучению математики, заинтересованность в результатах своего труда, и как следствие повышается качество математической подготовки.

Отметим также, что решение задач лишь тогда обеспечивает интенсивное умственное развитие и поднимает на качественно новый уровень интеллектуальные способности учащихся, когда поисковая деятельность мотивируется живым детским интересом к предмету познания, когда её результаты, выраженные словами, символами, образами или моделями, личностно или социально значимы для решающего, вызывают у него естественную потребность в общении с другими, чувство восхищения, или даже восторга, когда сам процесс работы над задачей окрыляет личность. Это во всей полноте относится и к использованию обращения задач в процессе обучения математике при условии методически правильной его организации.

Именно совокупности задач целевого назначения могут по-настоящему и надолго увлечь обучаемых решением и вести их по ступеням познания к открытию математических истин, а, может быть, даже и к созданию небольших теорий. Именно они призваны и должны обеспечивать возникновение атмосферы продуктивной поисковой деятельности, а удел педагога – поддерживать накал взыгравшихся страстей, «одухотворять» познавательный процесс, насыщать его человеческими ценностями, следить за правильностью речевого общения и математических записей, направлять помыслы и устремления обучающихся в нужное русло.

При этом важно, чтобы мотивы, цели, установки, ожидания и пр. были выражены не в искусственной или отвлеченной форме, а в естественной, легко воспринимаемой каждым обучаемым. Задачная конструкция эффективным средством станет лишь в руках искусного педагога, тонко чувствующего психологию обучаемого, понимающие закономерности усвоения им знаний [9].

И, наконец, использование обращённых задач в процессе обучения математике – шаг к технологическому обновлению школьного математического образования [3]. Это крайне актуальная задача современной методической науки, одно из перспективных направлений развития интенсивно формирующейся методической теории математических задач, позволяющее существенно усиливать развивающую значимость технологии обучения школьников математике.

Список литературы:

1. Абрамова О.М. Один из способов обращения задач как средство развития гибкости мышления школьников // Начальная школа плюс До и После. 2012. № 1. С. 79-83.
2. Абрамова О.М. Возможности использования прямых и обратных задач в развитии гибкости мышления учащихся на уроках математики // В мире научных открытий. 2011. № 9.1. С. 183-194.
3. Артюхина М.С. Интерактивные технологии в контексте современной гуманитарно-ориентированной системы образования // В мире научных открытий. 2014. № 3(51). С. 38-48.
4. Артюхина М.С., Артюхин О.И., Клешнина И.И. Аппаратная составляющая интерактивных технологий образовательного назначения // Вестник Казанского технологического университета. 2014. Т. 17. № 8. С. 308-314.
5. Гольдман А.М., Звавич Л.И. Учебные серии на уроках математики // Математика в школе. 1990. № 5. С. 19-22.
6. Градштейн И.С. Прямая и обратная теоремы. Л.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1950. 80 с.
7. Дразнин И.Е. Обращение условий планиметрических задач // Математика в школе. 2001. № 8. С. 52-55.
8. Зайкин М.И., Абрамова О.М. Обращением математических задач // Школьные технологии. 2013. № 1. С. 106-113.
9. Зайкин М.И., Егулемова Н.Н., Абрамова О.М. Серии, вариации и окрестности математических задач / Под общ. ред. М.И. Зайкина. Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2014. 149 с.

DOI: 10.7256/2306-434X.2014.3.14016

10. Канин Е.С. Развитие темы задачи // Математика в школе. 1991. № 3. С. 8-12.
11. Цукарь А.Я. Метод взаимно обратных задач в обучении математике. Новосибирск: Наука, 1989. 40 с.
12. Эрдниев П.М. Методика упражнений по математике. М.: Просвещение, 1970. 319 с.

References (transliteration):

1. Abramova O.M. Odin iz sposobov obrashcheniya zadach kak sredstvo razvitiya gibkosti myshleniya shkol'nikov // Nachal'naya shkola plyus Do i Posle. 2012. № 1. S. 79-83.
2. Abramova O.M. Vozmozhnosti ispol'zovaniya pryamykh i obratnykh zadach v razvitii gibkosti myshleniya uchashchikhsya na urokakh matematiki // V mire nauchnykh otkrytii. 2011. № 9.1. S. 183-194.
3. Artyukhina M.S. Interaktivnye tekhnologii v kontekste sovremennoi gumanitarno-orientirovannoi sistemy obrazovaniya // V mire nauchnykh otkrytii. 2014. № 3(51). S. 38-48.
4. Artyukhina M.S., Artyukhin O.I., Kleshnina I.I. Apparatnaya sostavlyayushchaya interaktivnykh tekhnologii obrazovatel'nogo naznacheniya // Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta. 2014. T. 17. № 8. S. 308-314.
5. Gol'dman A.M., Zvavich L.I. Uchebnye serii na urokakh matematiki // Matematika v shkole. 1990. № 5. S. 19-22.
6. Gradshtein I.S. Pryamaya i obratnaya teoremy. L.: Gosudarstvennoe izd-vo tekhniko-teoreticheskoi literatury, 1950. 80 s.
7. Draznin I.E. Obrashchenie uslovii planimetricheskikh zadach // Matematika v shkole. 2001. № 8. S. 52-55.
8. Zaikin M.I., Abramova O.M. Obrashcheniem matematicheskikh zadach // Shkol'nye tekhnologii. 2013. № 1. S. 106-113.
9. Zaikin M.I., Egulemova N.N., Abramova O.M. Serii, variatsii i okrestnosti matematicheskikh zadach / Pod obshch. red. M.I. Zaikina. Arzamas: Arzamasskii filial NNGU, 2014. 149 s.
10. Kanin E.S. Razvitie temy zadachi // Matematika v shkole. 1991. № 3. S. 8-12.
11. Tsukar' A.Ya. Metod vzaimno obratnykh zadach v obuchenii matematike. Novosibirsk: Nauka, 1989. 40 s.
12. Erdniev P.M. Metodika uprazhnenii po matematike. M.: Prosveshchenie, 1970. 319 s.

DOI: 10.7256/2306-434X.2014.3.14016