§1 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ НОВЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Л.Ю. Емалетдинова, С.В. Новикова

АВТОМАТИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ СИСТЕМЫ НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА ТИПА МАМДАНИ НА ОСНОВЕ СУЩЕСТВУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ТИПА ТАКАГИ-СУГЕНО

Аннотация. *Описывается метод определения параметров системы нечеткого логического вывода Мамдани из условия ее идентичности системе Такаги-Сугено. Обосновываются свойства, которым должны удовлетворять обе системы как универсальные аппроксиматоры для их идентичности. Приводится алгоритм формирования функций принадлежности правых частей правил системы Мамдани и метод формирования системы в целом. Эффективность предложенного метода подтверждается экспериментами.*

Ключевые слова: *нечеткая логика, нечеткий логический вывод, Мамдани, Такаги-Сугено.*

В современных исследованиях все чаще применяется аппарат нечеткой логики, когда переменные для вычисления и исследований задаются не количественно, а качественно, в виде так называемых лингвистических переменных. Переменные, задаваемые не числами, а словами, впервые были описаны Л. Заде ([1]). Лингвистические переменные описывают неточное (нечеткое) отражение человеком окружающего мира. Для того чтобы подвергнуть лингвистические переменные математическому анализу, было расширено одно из базовых понятий математики — понятие множества. Для этого было введено определение нечеткого множества и разработана теория нечетких множеств, включившая в себя обычные множества как частный случай. В обычной теории множеств существуют несколько способов задания множества. Одним из них является задание с помощью характеристической функции. Характеристическая функция множества A ∈ X — это функция $\mu_A(x)$, значения которой указывают, является ли $x \in X$ элементом множества A:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in A \\ 0, \text{если } x \notin A \end{cases} \quad (1)$$

Нечеткие множества являются естественным обобщением обычных множеств, когда мы отказываемся от бинарного характера этой функции и предполагаем, что она может принимать любые значения из отрезка [0, 1]. В теории нечетких множеств характеристическая функция называется функцией принадлежности, а ее значение $\mu_A(x)$, — степенью принадлежности элемента *x* нечеткому множеству A.

DOI: 10.7256/2305-6061.2013.2.6873

В различных приложениях используются различные функции принадлежности: кусочно-линейные, показательные (функции Пуассона), Гауссовы, и другие.

Для проведения вычисления над нечеткими множествами и нечеткими переменными применяются системы нечеткого логического вывода. Основой для проведения операции нечеткого логического вывода является база правил, содержащая нечеткие высказывания в форме «Если-то» и функции принадлежности для соответствующих лингвистических переменных. Результатом нечеткого вывода является четкое значение переменной y^* на основе заданных четких значений x_k (k=1..n).

Сегодня распространены две системы нечеткого логического вывода: система Такаги-Сугено и система Мамдани. Основное отличие таких систем: система Сугено выдает четкий (количественный) результат в виде значения линейной функции, а система Мамдани — качественный результат (нечеткую переменную) [2]. Т.е. если в системе Сугено присутствуют нечеткие правила вида:

«Если ($x_1 \in A_{1j}$) И ($x_2 \in A_{2j}$) И ... ($x_n \in A_{nj}$) ТО $y=b_{j0}+b_{j1}*x_1+b_{j2}*x_2+\ldots b_{jn}*x_n$» j=1,2,...m; (2)
где x_i — четкие значения нечетких переменных,
A_{ij} — нечеткие множества,
b_{ji} _ некоторые числа.

В системе Мамдани те же правила будут иметь вид:
«Если ($x_1 \in A_{1j}$) И ($x_2 \in A_{2j}$) И ... ($x_n \in A_{nj}$) ТО $y \in C_j$», j=1,2,...m; (3)
где C_j — нечеткое множество выходной переменной.

Если система Сугено используется как механизм вычисления четкого значения, то алгоритм Мамдани может применяться для лингвистического анализа полученного результата. В этом случае встает задача создания двух идентичных систем, Сугено и Мамдани, для одних и тех же входных данных. При этом:
1) Число входных переменных системы Мамдани совпадает с числом входов Такаги-Сугено.
2) Все нечеткие термы и их функции принадлежности системы Такаги-Сугено и Мамдани идентичны.
3) Все правила логического вывода Такаги-Сугено и системы Мамдани одинаковы.
4) Число нечетких термов выходной переменной системы Мамдани и Такаги-Сугено совпадают. Для каждого нечеткого терма выходной переменной необходимо задать собственную функцию принадлежности.
5) Основная проблема заключается в задании правых частей правил нечеткого вывода обоих систем. Известно, что модели типа Мамдани и типа Сугэно будут абсолютно идентичными только тогда, когда заключения правил заданы четкими числами, т.е. в случае, если:
- Термы выходной переменной в модели типа Мамдани задаются синглтонами — нечеткими аналогами четких чисел. В этом случае степени принадлежностей для всех элементов универсального множества равны нулю, за исключением одного со степенью принадлежности равной единице;
- Заключения правил в базе знаний модели типа Сугэно заданы функциями, в которых все коэффициенты при входных переменных равны нулю.

В случае, когда системы Такаги-Сугено и Мамдани имеют произвольный вид (2)-(3), невозможно построить две совершенно идентичные системы этих типов. Однако можно построить две системы, в некотором смысле «близкие» друг другу. Близость понимается как одинаковый четкий ответ двух систем в случае дефаззификации ответа системы Мамдани.

Если система Мамдани уже построена, то получить из нее аналогичную систему Сугено довольно просто. В некоторых математических пакетах существуют даже встроенные функции для такого преобразования (например, MathLab имеет функцию mam2sug [3]). Однако подобное обратное преобразование, когда правые части системы Сугено уже заданы, и требуется разработать правые части вывода аналогичной системы Мамдани, невозможно.

Итак, встает задача: преобразовать линейные многочлены правых частей правил системы Такаги-Сугено в функции принадлежностей правых частей (выходной переменной) системы Мамдани. В литературе не описан алгоритм подобного преобразования. Следовательно, алгоритм должен быть разработан самостоятельно.

DOI: 10.7256/2305-6061.2013.2.6873

Алгоритм преобразования правых частей вывода Такаги-Сугено в функции принадлежностей для вывода Мамдани

Генерация функций принадлежности системы Мамдани, аналогичной системе Сугено, может быть реализована на основе экспертных оценок, но данный метод является весьма трудоемким и имеет низкий уровень адекватности. Поэтому целесообразно разработать алгоритм, позволяющий строить систему Мамдани на основе существующей системы Сугено автоматически, лишь на основе характеристик системы Сугено.

Запишем значение выходной переменной для системы логического вывода Такаги-Сугено с заданными линейными правыми частями правил:

$$y = \frac{\sum_{j=1}^{M} w_j y_j}{\sum_{j=1}^{M} w_j} \tag{4}$$

Здесь: w_j — вес j-того правила при подаче на вход системы четкого набора данных $X=(x_1,x_2,\ldots x_n)$; y_j- правая часть j-того правила (линейный многочлен). При этом:

$$w_j = \prod_{i=1}^{N} \mu_i^j(x_i) \tag{5}$$

$$y_j = \sum_{i=1}^{N} t_i^j x_i + t_0^j \tag{6}$$

где $\mu_i^j(x_i)$ — функции принадлежностей входных переменных, определенные в виде гауссианов с параметрами a_i^j и σ_i^j,j — номер правила вывода, i — индекс нечеткого терма в правиле:

$$\mu_i^j(x_i) = \exp\left[-\left(\frac{x_i - a_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right] \tag{7}$$

Тогда окончательно выходную переменную можно определить как:

$$y = \frac{\sum_{j=1}^{M}\left(\sum_{i=1}^{N} t_i^j x_i + t_0^j\right)\prod_{i=1}^{N}\exp\left[-\left(\frac{x_i - a_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right]}{\sum_{j=1}^{M}\prod_{i=1}^{N}\exp\left[-\left(\frac{x_i - a_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right]} \tag{8}$$

Именно при таком способе задания алгоритма Такаги-Сугено он является универсальным аппроксиматором ([4],[5]).

Естественно было бы определить такую систему нечеткого вывода типа Мамдани, которая, с одной стороны, была бы по возможности идентична системе Такаги-Сугено, а с другой — также являлась универсальным аппроксиматором. Идентичность двух систем естественно понимать в «близости» значений выходной переменной при одинаковых значениях входных параметров. При этом стоит учесть, что система Мамдани, в отличие от Такаги-Сугено, выдает нечеткий результат, который на заверша-

DOI: 10.7256/2305-6061.2013.2.6873

ющем этапе необходимо привести к четкости (дефаззифицировать). То есть способ дефаззификации будет существенным образом влиять на ответ системы, а, следовательно, и на степень ее «близости» к системе Сугено.

В 1992 г. Л. Ванг ([6]) показал, что нечеткая система типа Мамдани является универсальным аппроксиматором, если используется стандартный набор правил вида:

Если (x_1^j есть A_1^j) и (x_2^j есть A_2^j) и … (x_N^j есть A_N^j), ТО (y^j есть C^j)

при

1. гауссовских функциях принадлежности входных переменных:

$$\mu_{A_i}^j(x_i) = \exp\left[-\left(\frac{x_i - a_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right] \tag{9}$$

2. гауссовской функции принадлежности выходной переменной:

$$\mu_C^j(x_i) = \exp\left[-\left(\frac{x_i - c^j}{\sigma_C^j}\right)^2\right] \tag{10}$$

3. композиции в виде произведения:

$$[A_i(x_i) \text{ and } A_j(x_j)] = A_i(x_i)A_j(x_j),$$

4. импликации в форме Ларсена:

$$[A_i(x_i) \text{ and } A_j(x_j)] \Rightarrow C_i(y) = A_i(x_i)A_j(x_j)C_i(y),$$

5. центроидном методе приведения к четкости:

$$y = \frac{\sum_{j=1}^{M} \tilde{n}^j \prod_{i=1}^{N} \exp\left[-\left(\frac{x_i - a_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right]}{\sum_{j=1}^{M} \prod_{i=1}^{N} \exp\left[-\left(\frac{x_i - a_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right]} \tag{11}$$

где c^j — центры функций принадлежностей выходной переменной.

Существуют и другие способы задания систем Мамдани, обладающих свойствами универсальных аппроксиматоров.

Таким образом, если система Такаги-Сугено функционирует согласно формуле (8), а система Мамдани — согласно формуле (11), то обе они будут являться универсальными аппроксиматорами. Для определения характеристик будущей системы Мамдани, а именно — центров функций принадлежностей выходной переменной c^j (где сами функции определены по формуле (10)), необходимо приравнять формулы (8) и (11):

$$\frac{\sum_{j=1}^{M}\left(\sum_{i=1}^{N} t_i^j x_i + t_0^j\right)\prod_{i=1}^{N} \exp\left[-\left(\frac{x_i - a_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right]}{\sum_{j=1}^{M} \prod_{i=1}^{N} \exp\left[-\left(\frac{x_i - a_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right]} = \frac{\sum_{j=1}^{M} \tilde{n}^j \prod_{i=1}^{N} \exp\left[-\left(\frac{x_i - a_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right]}{\sum_{j=1}^{M} \prod_{i=1}^{N} \exp\left[-\left(\frac{x_i - a_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right]} \tag{12}$$

DOI: 10.7256/2305-6061.2013.2.6873

В силу равенства знаменателей в обеих частях выражения, для определения параметров c^j воспользуемся уравнением:

$$\sum_{j=1}^{M}\left(\sum_{i=1}^{N} t_i^j x_i + t_0^j\right)\prod_{i=1}^{N}\exp\left[-\left(\frac{x_i - a_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right] = \sum_{j=1}^{M}\tilde{n}^j\prod_{i=1}^{N}\exp\left[-\left(\frac{x_i - a_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right] \quad (13)$$

Или для каждого параметра c^j отдельно:

$$\left(\sum_{i=1}^{N} t_i^j x_i + t_0^j\right)\prod_{i=1}^{N}\exp\left[-\left(\frac{x_i - a_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right] = \tilde{n}^j\prod_{i=1}^{N}\exp\left[-\left(\frac{x_i - a_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right] \quad (14)$$

Равенство (14) следует понимать в смысле равенства двух функционалов (минимального расстояния между функционалами). Для определения параметра c^j из выражения (11) следует перейти к N-кратным интегралам по обеим частям выражения. Тогда центры функций принадлежности c^j найдутся из уравнения:

$$c^j = \frac{\int\ldots\int\left(\sum_{i=1}^{N} t_i^j x_i + t_0^j\right)\prod_{i=1}^{N}\exp\left[-\left(\frac{x_i - a_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right]dx_1dx_2..dx_N}{\int\ldots\int\prod_{i=1}^{N}\exp\left[-\left(\frac{x_i - a_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right]dx_1dx_2..dx_N} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i^j\int\ldots\int x_i\prod_{i=1}^{N}\exp\left[-\left(\frac{x_i - a_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right]dx_1dx_2..dx_N}{\int\ldots\int\prod_{i=1}^{N}\exp\left[-\left(\frac{x_i - a_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right]dx_1dx_2..dx_N} + t_0^j \quad (15)$$

Для непосредственных вычислений перейдем к определенным интегралам. Для определения пределов интегрирования воспользуемся правилом «трех сигм». В нашем контексте его можно трактовать так: значения мультипликативного функционала, определенного гауссианами, за пределами расстояния 3*s* от центра гауссиана, ничтожно мало. Тогда пределы интегрирования по каждой переменной x_i определяются как $[(a_i^j - 3\sigma_i^j), (a_i^j + 3\sigma_i^j)]$. Окончательно получим формулу для определения центров гауссианов функций принадлежности выходной переменной системы Мамдани:

$$c^j = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i^j\int_{a_1^j-3\sigma_1^j}^{a_1^j+3\sigma_1^j}\ldots\int_{a_N^j-3\sigma_N^j}^{a_N^j+3\sigma_N^j} x_i\prod_{i=1}^{N}\exp\left[-\left(\frac{x_i - a_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right]dx_1dx_2..dx_N}{\int_{a_1^j-3\sigma_1^j}^{a_1^j+3\sigma_1^j}\ldots\int_{a_N^j-3\sigma_N^j}^{a_N^j+3\sigma_N^j}\prod_{i=1}^{N}\exp\left[-\left(\frac{x_i - a_i^j}{\sigma_i^j}\right)^2\right]dx_1dx_2..dx_N} + t_0^j \quad (16)$$

DOI: 10.7256/2305-6061.2013.2.6873

Проведя интегрирование выражения (16) по частям, получим упрощенную формулу для вычисления параметров $\tilde{n}^j$:

$$c^j = \sum_{i=1}^{N} t_i^j a_i^j + t_0^j \qquad (17)$$

Эксперименты по использованию выражений (16) — (17) для генерирования функционала вида (11), демонстрируют, что он оказывается аналогичен функционалу (8). Так для простейшей системы Такаги-Сугено 1-го порядка с одной входной переменной и одним нечетким термом для правила:

Если x∈A ТО y=3x+80

где функция принадлежности терма А имеет вид:

$$\mu_A = \exp\left(-\frac{(x-10)^2}{4^2}\right)$$

выходная переменная определяется функционалом:

$$y(x) = (3x+80)\times\exp\left(-\frac{(x-10)^2}{4^2}\right)$$

График данного функционала имеет вид (см. рис. 1):

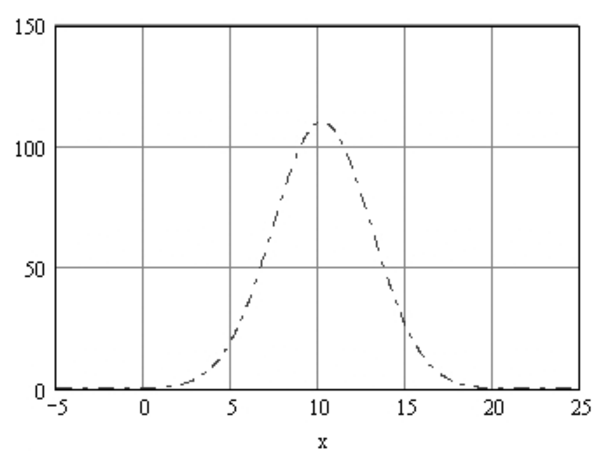

Рис. 1

Функциональная зависимость входной и выходной переменных системы Такаги-Сугено с одной входной переменной

Рассчитанный по формуле центр функции принадлежности системы Мамдани, идентичной данной, показал результат: *c*=110.

Построенная система Мамдани с найденным параметром определяет выходную переменную как (см. рис. 2):

$$y(x) = 110\times\exp\left(-\frac{(x-10)^2}{4^2}\right)$$

DOI: 10.7256/2305-6061.2013.2.6873

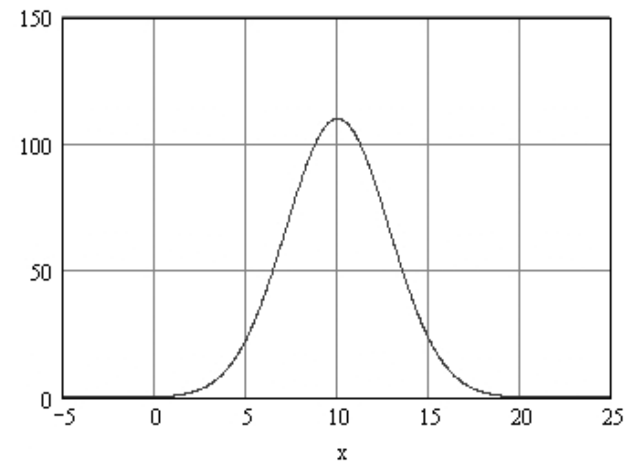

Рис. 2

Функциональная зависимость входной и выходной переменных системы Мамдани с найденным центром с

Сопоставление графиков демонстрирует их полную идентичность (см. рис.3):

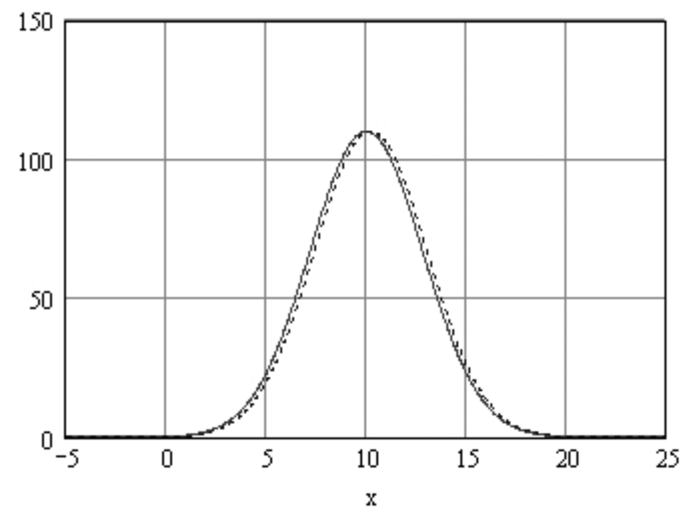

Рис. 3

Сопоставление графиков зависимостей выходной переменной от одного входа для исходной системы Такаги-Сугено (пунктирная линия) и построенной на ее основе системы Мамдани (сплошная линия)

Аналогичные результаты продемонстрировал эксперимент с системой Такаги-Сугено для двух входных переменных с двумя нечеткими термами. Характеристики исходной системы Такаги-Сугено:

- правила:

Если $x \in A$ и $y \in A$ ТО $y=(3x+6y+7)$

- функции принадлежности термов:

$$\mu_A = \exp\left(-\frac{(x-7)^2}{2^2}\right); \ \mu_B = \exp\left(-\frac{(y-12)^2}{3^2}\right).$$

DOI: 10.7256/2305-6061.2013.2.6873

Рассчитанное значение центра гауссиана выходной переменой для системы Мамдани:

$$c=100.$$

Результаты сопоставления значений выходных функционалов двух систем демонстрирует рис. 4:

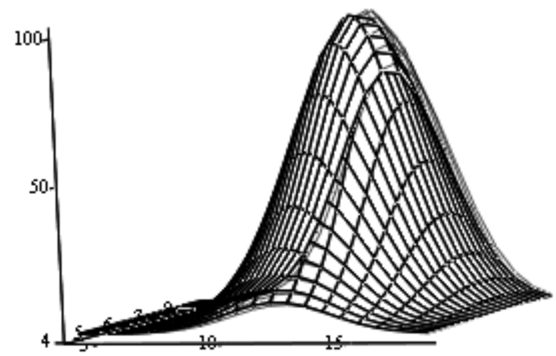

Рис. 4

Сопоставление графиков зависимостей выходной переменной от двух входов для исходной системы Такаги-Сугено (тонкие линии) и построенной на ее основе системы Мамдани (жирные линии)

Относительно определения смещения σ^j для функций принадлежности нечетких термов выходной переменной невозможно дать однозначных рекомендаций. Это связано с тем, что для сравнения ответа системы Мамдани с ответом системы Такаги-Сугено, необходимо провести дефаззификацию ответа системы Мамдани, в процессе которой информация о разбросе полностью теряется. Однако для предотвращения возможности потери данных, можно рекомендовать подбирать разбросы таким образом, чтобы в совокупности гауссианы функций принадлежностей полностью покрывали область определения выходной переменной [*a,b*]. Для этого можно применить следующую процедуру:

1) Упорядочить центры найденных гауссианов по возрастанию ($c^1 < c^2 < ... < c^M$). Обозначить границы области определения выходной переменной как: $c^0 = a$, $c^{M+1} = b$.

2) Для всех *s* от 1 до M:

- Определить расстояния от центра c^s до предыдущего по возрастанию центра кластера: $r_L = c^s - c^{s-1}$, а также до следующего по возрастанию центра кластера: $r_R = c^{s+1} - c^s$.
- Определить разброс для гауссиана с центром c^s как: $\sigma^s = \max(r_L, r_R)$

Таким образом, для генерирования системы нечеткого логического вывода типа Мамдани на основе существующей системы Такаги-Сугено эффективно применять следующий алгоритм:

1) Задать число входных переменных системы Мамдани равным числу входов системы Такаги-Сугено.
2) Все нечеткие термы и их функции принадлежности системы Такаги-Сугено переносятся в систему Мамдани без изменений. При этом необходимо, чтобы функции принадлежности имели вид гауссиана с произвольными параметрами центров и разбросов.
3) Задать число нечетких термов выходной переменной системы Мамдани равным числу нечетких термов выходной переменной Такаги-Сугено. Для каждого нечеткого терма выходной переменной задать функцию принадлежности в виде гауссиана:

$$\mu^j(y) = \exp\left(-\frac{(y-c^j)^2}{{\sigma^j}^2}\right)$$

DOI: 10.7256/2305-6061.2013.2.6873

4) Значения центров гауссианов c^j определить по формуле (17), исходя из значений параметров системы Такаги-Сугено. Значения разбросов гауссианов σ^j определить из условия равномерного покрытия области определения согласно предложенной процедуре.
5) Все правила логического вывода Такаги-Сугено становятся правилами вывода системы Мамдани.

Предложенная методика построения идентичных систем нечеткого логического вывода двух видов была реализована на практике при разработке системы поддержки принятия решений для обеспечения экологической безопасности. Практическое использование доказало ее адекватность и высокую эффективность.

Список литературы:

1. Zadeh L.A. Fuzzy sets. Information and Control, 1965. — Vol. 8. — № 3. — P. 338-353.
2. Штовба С.Д. Введение в теорию нечетких множеств и нечеткую логику. Винница: Изд-во винницкого государственного технического университета, 2001. — 198 с.
3. Штовба С.Д. Проектирование нечетких систем средствами MatLab. — М.: Горячая линия-Телком, 2007. — 284 с.
4. Verbruggen H.B., Babuska R. Constructing fuzzy models by product space clustering // Fuzzy model identification / Eds. H. Helendorn, D. Driankov. — Berlin: Springer, 1998. P. 53-90.
5. Xue Q., Hu Y., Tompkins W. Analysis of hidden units of back propagation model by SVD // Proc. IJCNN, 1990. — Washington. — P. 739-742.
6. Wang L. X. Fuzzy systems are universal approximators // Proc. of the IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems. — San Diego, 1992. — P. 1163-1169.

References (transliteration):

1. Zadeh L.A. Fuzzy sets. Information and Control, 1965. — Vol. 8. — № 3. — P. 338-353.
2. Shtovba S.D. Vvedenie v teoriyu nechetkih mnozhestv i nechetkuyu logiku. Vinnica: Izd-vo vinnickogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta, 2001. — 198 s.
3. Shtovba S.D. Proektirovanie nechetkih sistem sredstvami MatLab. — M.: Goryachaya liniya-Telkom, 2007. — 284 s.
4. Verbruggen H.B., Babuska R. Constructing fuzzy models by product space clustering // Fuzzy model identification / Eds. H. Helendorn, D. Driankov. — Berlin: Springer, 1998. P. 53-90.
5. Xue Q., Hu Y., Tompkins W. Analysis of hidden units of back propagation model by SVD // Proc. IJCNN, 1990. — Washington. — P. 739-742.
6. Wang L.X. Fuzzy systems are universal approximators // Proc. of the IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems. — San Diego, 1992. — P. 1163-1169.

DOI: 10.7256/2305-6061.2013.2.6873